NO: 17-03-16
Date:

Previously on Beligiannis

Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Αν $\alpha \in G$, τότε:

α^{-1}: αντίστροφο του α και e: ουδέτερο στοιχείο της G

*Υπενθύμιση: Αν $\alpha \in G$, τότε:

$\langle \alpha \rangle = \{ \alpha^n \in G \mid n \in \mathbb{Z} \}$: Η κυκλική υποομάδα της G, η οποία παράγεται απ' το στοιχείο α

Ορισμός: Αν $H \subseteq G$, τότε το υποσύνολο H θα λέμε ότι καλείται κλειστό στην πράξη $\cdot$ της G $\Longleftrightarrow$

$\forall\, \alpha, b \in H : \alpha \cdot b \in H$

Έστω ότι $H \subseteq G$, υποσύνολο της G, το οποίο είναι κλειστό στην πράξη $\cdot$ της G. Τότε, το υποσύνολο H εφοδιάζεται με την επαγόμενη πράξη $\cdot : H \times H \to H$
$(a,b) \mapsto a \cdot b$

• Ορισμός: Το υποσύνολο H της G καλείται υποομάδα της G $\Longleftrightarrow$

① Το H είναι κλειστό στην πράξη $\cdot$ της G

② Το ζεύγος $(H,\cdot)$ αποτελεί ομάδα

NO:

Date:

• Πρόταση: Έστω H μια υποομάδα της ομάδας G

① Αν e_H: ουδέτερο στοιχείο της ομάδας H, τότε: $e_H = e$

② Αν $a \in H$ και a_H^{-1}: αντίστροφο του a στην H, τότε: $a_H^{-1} = a^{-1}$

Απόδειξη: ① Επειδή το e_H είναι ουδέτερο στην ομάδα H θα έχουμε $e_H \cdot e_H = e_H$ ①

Επειδή το e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας G, θα έχουμε: $e_H \cdot e = e_H$ ②

Από ①,② $\Rightarrow e_H \cdot e_H = e_H \cdot e \xrightarrow[\text{Διαγραφής}]{\text{Νόμος}} \boxed{e_H = e}$

② Επειδή το a_H^{-1} είναι το αντίστροφο του a στην ομάδα H, θα έχουμε: $a \cdot a_H^{-1} = e_H = e$ ③

Επειδή το a^{-1} είναι το αντίστροφο του a στην ομάδα G θα έχουμε: $a \cdot a^{-1} = e$ ④

Απ' τις ③,④ $\Longrightarrow a \cdot a_H^{-1} = a \cdot a^{-1} \xrightarrow[\text{Διαγραφής}]{\text{Νόμος}} a_H^{-1} = a^{-1}$

Σημείωση: Αν η H είναι υποομάδα μιας ομάδας G, θα το συμβολίζουμε ως εξής: $H \leq G$

NO:
Date:

Παρατήρηση: Κάθε ομάδα $(G,\cdot)$ έχει τουλάχιστον τις εξής δύο υποομάδες:

① $\{e\} \leq G \rightarrow$ Το $\{e\}$ καλείται τετριμμένη υποομάδα της G

② $G \leq G \longrightarrow$ Η G καλείται μη γνήσια υποομάδα του εαυτού της

• Θεώρημα: Έστω H ένα υποσύνολο της ομάδας $(G,\cdot)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

① $H \leq G$

② α) Το H είναι κλειστό στην πράξη $\cdot$ της ομάδας

β) $e \in H$

γ) $\forall\, a \in H: a^{-1} \in H$

③ α) $H \neq \emptyset$

β) $\forall\, a, b \in H: a \cdot b^{-1} \in H$

NO:
Date:

Απόδειξη: ① $\Longrightarrow$ ②. Το α) προκύπτει απ' τον ορισμό της υποομάδας και τα β, γ προκύπτουν άμεσα απ' την προηγούμενη πρόταση.

② $\Longrightarrow$ ③. Από το (2β) έχουμε ότι: $e \in H$, οπότε $H \neq \emptyset$

Έστω ότι $a, b \in H$. Από το (2γ) έπεται ότι $b^{-1} \in H$. Απ' το (2α) έπεται ότι: $\left.\begin{matrix} a \in H \\ b^{-1} \in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$

③ $\Longrightarrow$ ①. Επειδή $H \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in G : a \in H$.

Απ' το (3β) {θέτοντας $a = b$} έπεται ότι: $a \cdot a^{-1} \in H$, συνεπώς: $e \in H$

Απ' το (3β), για κάθε $b \in H$, έπεται ότι: $\left.\begin{matrix} e \in H \\ b \in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow e \cdot b^{-1} = b^{-1} \in H$

Τέλος, αν $X, Y \in H$, θδο: $X \cdot Y \in H$

Ισχύει ότι $Y^{-1} \in H$, οπότε, απ' το (3β), θα έχουμε

$$\left.\begin{matrix} X \in H \\ Y^{-1} \in H \end{matrix}\right\} \xrightarrow[(Y^{-1})^{-1} = Y]{\text{όμως}} X(Y^{-1})^{-1} = X \cdot Y \in H$$

NO:
Date:

Άρα το υποσύνολο H είναι ομάδα με την επαγόμενη πράξη $\cdot$ της ομάδας, με ουδέτερο στοιχείο e (της ομάδας G) και αντίστροφο του $x \in H$ το x^{-1}

Αν $(G,+)$ είναι μια ομάδα με προσθετικό συμβολισμό [0: ουδέτερο στοιχείο, αν $\alpha \in G$: $(-\alpha)$: αντίθετο του α]

Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα υποσύνολο H της G:

① $H \leq G$

② ⓐ Το H είναι κλειστό στην πράξη + της ομάδας

ⓑ $0 \in H$

ⓒ $\forall \alpha \in H: -\alpha \in H$

③ ⓐ $H \neq \emptyset$

ⓑ $\forall \alpha, b \in H: \alpha - b \in H$

Παράδειγμα: ① Αν $(G,\cdot)$ είναι μια ομάδα και $\alpha \in G$, τότε $\langle \alpha \rangle \leq G$, όπου $\langle \alpha \rangle = \{\alpha^n \in G \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Διότι: ⓐ $\langle \alpha \rangle \neq \emptyset$ {περιέχει πχ το $\alpha \in \langle \alpha \rangle$}

NO:
Date:

(6) Έστω $x, y \in \langle\alpha\rangle$. Τότε $x = \alpha^n$, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ } Τότε
$y = \alpha^m$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$

$x \cdot y^{-1} = \alpha^n \cdot (\alpha^m)^{-1} = \alpha^n \cdot \alpha^{-m} = \alpha^{n-m} \in \langle\alpha\rangle$

Άρα, απ' το Θεώρημα έπεται ότι $\langle\alpha\rangle = G$

• Αν η ομάδα G έχει δοθεί προσθετικά: $(G,+)$. Τότε:

$\langle\alpha\rangle = \{n \cdot \alpha \in G \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\langle\alpha\rangle \leq G$

(2) Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{C},+)$. Τότε:

$(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{Q},+) \leq (\mathbb{R},+) \leq (\mathbb{C},+)$

(3) Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{C}^*,\cdot)$. Τότε:

$(\{-1,1\},\cdot) \leq (\mathbb{Q}^*,\cdot) \leq (\mathbb{R}^*,\cdot) \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$

(4) Έστω το σύνολο $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$

Προφανώς, $U \leq \mathbb{C}^*$ διότι: $U \neq \emptyset$
Αν $z, \omega \in U \Rightarrow |z| = |\omega| = 1$ και

$|z \cdot \omega^{-1}| = |z||\omega^{-1}| = |z||\omega|^{-1} = 1 \Rightarrow z \cdot \omega^{-1} \in U$

Άρα, $U \leq \mathbb{C}^*$. Η U καλείται η ομάδα του κύκλου

*: χωρίς το 0

NO:
Date:

⑤ Για κάθε $n \geq 1$, θεωρούμε τα σύνολα:

$U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} \subseteq \mathbb{C}^*$

Το U_n είναι κλειστό στην πράξη πολλαπλασιασμού της $\mathbb{C}^*$ και με την επαγόμενη πράξη αποτελεί ομάδα.

Άρα, $U_n \leq \mathbb{C}^*$

U_n: Η ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας

Γεωμετρική Έκφραση:

- $U_n = \{ e^{2k\pi i} \in \mathbb{C} \ , 0 \leq k \leq n \}$

ή

$U_n = \{ \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \mathbb{C} \mid 0 \leq k \leq n \}$

⑥ Αν $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$, ή $\mathbb{C}$, τότε:

$GL(n, K) = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A: \text{αντιστρέψιμος} \} =$

$= \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid |A| \neq 0 \}$ είναι μια ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων

Θεωρούμε το υποσύνολο: $SL(n, K) = \{ A \in M_{n \times n} \mid |A| = 1 \} \subseteq GL(n, K)$

NO:
Date:

Προφανώς, $SL(n,K) \neq \emptyset$, διότι $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in SL(n,K)$

Αν $A, B \in SL(n,K)$, τότε: $|A| = |B| = 1$

Τότε: $|A \cdot B^{-1}| = |A||B^{-1}| = |A| \cdot |B|^{-1} = 1$

Άρα, $SL(n,K) \leq GL(n,K)$

⤳ Η $GL(n,K)$ καλείται n-οστή γενική γραμμική ομάδα

⤳ Η $SL(n,K)$ καλείται n-οστή ειδική γραμμική ομάδα.

(7) Έστω $Q = \left\{ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, -I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, -I = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, -J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$

• $Q \subseteq GL(2, \mathbb{C})$

Προκύπτει εύκολα ότι:

⤳ $I^2 = J^2 = K^2 = I \cdot J \cdot K = -I_2$ και

⤳ $I \cdot J = K$, $J \cdot K = I$, $KI = J$ και αντίστοιχα

⤳ $J \cdot I = -K$, $K \cdot J = -I$, $I \cdot K = -J$

Τότε, το Q είναι κλειστό στην πράξη • της $GL(2, \mathbb{C})$